Ecuaciones Diferenciales I

Examen XII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2017-18.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial B.

Fecha 10 de Mayo de 2018.

Ejercicio 1. Se considera el campo de fuerzas siguiente:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{2x}{y}, -\dfrac{x^2}{y^2}\right) \end{array}$$

¿Admite un potencial? Calcula el trabajo a lo largo de la curva dada por:

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 1+\operatorname{sen}\theta), \quad \theta\in[0,\pi].$$

Notamos $F=(F_1,F_2)$. En primer lugar, vemos que $F_1,F_2\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ por ser cociente de funciones polinómicas en las que no se anula el denominador. Veamos ahora que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ es convexo.

- Sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ y $t\in[0,1]$; y veamos que el segmento que une (x_1,y_1) y (x_2,y_2), notado por $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$, está contenido en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] &= \{t(x_1,y_1)+(1-t)(x_2,y_2)\mid t\in[0,1]\} = \\ &= \{(tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2)\mid t\in[0,1]\}.\end{aligned}$$

  Para que se tenga que $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, es necesario que:

$$ty_1+(1-t)y_2>0$$

  Tenemos que ambos sumandos son no-negativos. Además, en el caso de que uno de ellos se anule el otro no se anula, luego la suma es positiva. Por tanto, $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

Por tanto, tenemos que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ es convexo, luego en particular es conexo. Veamos ahora si cumple la condición de exactitud:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y).$$

Por tanto, también cumple la condición de exactitud. Por tanto, sabemos que sí existe un potencial $U:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla U = F$.

Como existe un potencial, el trabajo a lo largo de la curva γ se puede calcular como:

$$W(\gamma) = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)).$$

Veamos en primer lugar que no es una trayectoria cerrada, ya que en ese caso habríamos terminado. Tenemos que:

$$\gamma(\pi) = (\cos\pi, 1+\operatorname{sen}\pi) = (-1,1)\neq(1,1)=\gamma(0).$$

Por tanto, vemos que es necesario calcular U. Como $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, tenemos que:

$$U(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx = \int \frac{2x}{y}\,dx = \frac{x^2}{y}+\varphi(y).$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función que representa la constante de integración en función de y. Además, como $U \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, tenemos que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Ahora, como $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$, tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x^2}{y^2} \Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, tenemos que φ es constante. Supongamos por ejemplo $\varphi = 0$, aunque podríamos haber elegido cualquier otro valor (el potencial es único salvo una constante aditiva). Por tanto:

$$U(x,y) = \frac{x^2}{y} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Por tanto, el trabajo a lo largo de la curva γ es:

$$\begin{aligned} W(\gamma) &= U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(\cos\pi, 1 + \operatorname{sen}\pi) - U(\cos 0, 1 + \operatorname{sen} 0) = \\ &= U(-1,1) - U(1,1) = \frac{(-1)^2}{1} - \frac{1^2}{1} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Demuestra que la ecuación diferencial

$$x' = (x-t)^2$$

admite una solución polinómica de grado uno. Encuentra un cambio de variable que transforme esta ecuación en una ecuación lineal.

Ejercicio 3. Dadas dos funciones $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que cumplen $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, demuestra que la función

$$U(x,y) = \int_0^y Q(0,s)\,ds + \int_0^x P(s,y)\,ds$$

es solución de las ecuaciones:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Como P, Q son continuas en $\mathbb{R}^2$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, las integrales que encontramos son de clase $C^1(\mathbb{R})$, por lo que $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calculamos las derivadas parciales de cada una de las integrales. En primer lugar, de forma directa tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y Q(0,s)\,ds\right)(x,y) = 0$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y Q(0,s)\,ds\right)(x,y) = Q(0,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x P(s,y)\,ds\right)(x,y) = P(x,y)$$

Por último, empleado el Teorema de la Derivada de Integrales dependientes de un parámetro, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x P(s,y)\,ds\right)(x,y) = \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)\,ds \overset{(*)}{=} \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)\,ds \overset{(**)}{=} Q(x,y) - Q(0,y)$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis del enunciado y en $(**)$ la Regla de Barrow. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(0,y) + Q(x,y) - Q(0,y) = Q(x,y).$$

Por tanto, U es solución de las ecuaciones dadas.

Ejercicio 4. Considera las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geqslant 0, \\ t^3 & \text{si } t < 0, \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

¿Son linealmente independientes? Calcula su Wronskiano.

Calculamos su Wronskiano en primer lugar. Por el carácter local de la derivabilidad, tenemos que:

$$f_1'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0, \\ 3t^2 & \text{si } t < 0, \end{cases} \qquad f_2'(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Además, como los límites laterales en el origen coinciden, tenemos que f_1, f_2 son derivables en todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos considerar su Wronskiano. Para $t > 0$, tenemos que:

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} 0 & t^3 \\ 0 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Para $t < 0$, tenemos que:

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t^3 & 0 \\ 3t^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, tenemos que:

$$W(f_1, f_2)(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, no nos es de ayuda para determinar si son linealmente independientes, por lo que debemos recurrir a la definición. Buscamos por tanto $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Para $t = 1$, tenemos que:

$$0 = c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0.$$

- Para $t = -1$, tenemos que:

$$0 = c_1 f_1(-1) + c_2 f_2(-1) = c_1 \cdot (-1)^3 + c_2 \cdot 0 = -c_1 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

Por tanto, tenemos que $c_1 = c_2 = 0$, por lo que f_1, f_2 son linealmente independientes.

Ejercicio 5. Dada una función continua $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a(t)$, se denota por Z al conjunto de funciones $x \in C^1(\mathbb{R})$, $x = x(t)$, que satisfacen la ecuación integro-diferencial

$$x'(t) + x(t) = \int_0^t a(s)x(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Demuestra que Z admite una estructura de espacio vectorial. ¿Qué dimensión tiene?

Como $Z \subset C^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tan solo tendremos que probar que Z es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Para ello, tendremos que probar que $Z \neq 0$ y que es cerrado para la suma y el producto por escalares.

Sea $x \equiv 0$, la función constantemente nula. Tenemos que:

$$x'(t) + x(t) = 0 + 0 = 0 = \int_0^t 0\,ds = \int_0^t a(s)\cdot 0\,ds \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $x \in Z$, luego $Z \neq 0$. Veamos ahora que es cerrado para la suma y el producto por escalares.

Suma Sean $x_1, x_2 \in Z$. Tenemos que:

$$(x_1+x_2)'(t) + (x_1+x_2)(t) = x_1'(t) + x_2'(t) + x_1(t) + x_2(t) =$$
$$= \int_0^t a(s)x_1(s)\,ds + \int_0^t a(s)x_2(s)\,ds = \int_0^t a(s)(x_1(s)+x_2(s))\,ds.$$

Por tanto, $x_1 + x_2 \in Z$.

Producto por escalares Sean $x \in Z$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$(\lambda x)'(t) + (\lambda x)(t) = \lambda x'(t) + \lambda x(t) = \lambda(x'(t) + x(t)) =$$
$$= \lambda \int_0^t a(s)x(s)\,ds = \int_0^t a(s)(\lambda x(s))\,ds.$$

Por tanto, $\lambda x \in Z$.

Por tanto, Z es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, por lo que Z tiene estructura de espacio vectorial. Estudiar su dimensión es algo más complejo. Como no se han estudiado las ecuaciones integro-diferenciales en la asignatura, derivamos la ecuación para obtener una ecuación diferencial. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$x''(t) + x'(t) = a(t)x(t) \tag{2}$$

Notemos que, si x es una solución de la Ecuación (1), entonces x es solución de la Ecuación (2), pero el recíproco no lo tenemos asegurado. Sea x una solución de la Ecuación (2). Integrando la Ecuación (2) en el intervalo $[0,t]$, tenemos que:

$$\int_0^t x''(s) + x'(s)\,ds = \int_0^t a(s)x(s)\,ds \Longrightarrow x'(t) - x'(0) + x(t) - x(0) = \int_0^t a(s)x(s)\,ds.$$

Por tanto, dada $x(t)$ una solución de la Ecuación (2), tenemos que:

$$x(t) \text{ es solución de la Ecuación (1)} \Longleftrightarrow x'(0) = -x(0).$$

Como anteriormente hemos visto que, si x es solución de la Ecuación (1), entonces x es solución de la Ecuación (2), tenemos que, dada $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$x(t) \text{ es solución de la Ecuación (1)} \Longleftrightarrow x'(0) = -x(0)$$

Estamos ahora para probar que $\dim Z = 1$. para ello, consideramos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & Z & \longrightarrow & \mathcal{L}\{(1,-1)\} \\ & x & \longmapsto & (x(0), x'(0)) \end{array}$$

En primer lugar, hemos de ver que está bien definida. Veamos que, dado $x \in Z$, tenemos que $\Phi(x) \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}$. Tenemos que:

$$(x(0), x'(0)) = (x(0), -x(0)) = x(0)(1,-1) \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

Por tanto, Φ está bien definida. Veamos que es biyectiva.

Inyectividad Sean $x_1, x_2 \in Z$ tales que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Entonces, sabemos que x_1, x_2 son solución de la Ecuación (2), y tenemos que:

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Longrightarrow (x_1(0), x_1'(0)) = (x_2(0), x_2'(0)) \Longrightarrow x_1(0) = x_2(0), x_1'(0) = x_2'(0).$$

por tanto, x_1, x_2 son dos soluciones con las mismas condiciones iniciales de la Ecuación lineal (2). Por el Teorema de Unicidad del Capítulo 4, tenemos que $x_1 = x_2$, luego Φ es inyectiva.

Sobreyectividad Sea $v \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}$, y veamos que $\exists x \in Z$ tal que $\Phi(x) = v$. Como $v \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}$, tenemos que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha(1,-1)$. Por el Teorema de Existencia del Capítulo 4, tenemos que existe una solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (2) con condiciones iniciales $(x(0), x'(0)) = \alpha(1,-1)$. Como $x(0) = -x'(0)$, tenemos que $x \in Z$ y $\Phi(x) = v$. Por tanto, Φ es sobreyectiva.

Por tanto, Φ es biyectiva, por lo que:

$$\dim Z = \dim \mathcal{L}\{(1,-1)\} = 1.$$